Grafické riešenie sústav lineárnych rovníc a nerovníc

RNDr. Beáta Vavrinčíková

U: Poznáš nejaké metódy na riešenie sústavy lineárnych rovníc?

Ž: *Pravdaže, najčastejšie používam dosadzovaciu metódu, ale niekedy aj sčitovaciu.*

U: Dobre, dnes si povieme o ďalšej metóde, ktorú môžeme použiť na vyriešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, a to o grafickej metóde.

Ž: *Z toho usudzujem, že asi budeme kresliť nejaké grafy. To aby som išiel pohľadať pravítko...*

U: Usudzuješ správne, pravítko sa ti naozaj zíde. Poďme na to. Uvažujme o sústave dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktorú môžeme v základnom tvare zapísať napríklad takto:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

pričom $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sú reálne koeficienty. Z každej z týchto rovníc vyjadri y.

Ž: *Ak to urobím v prvej rovnici, dostanem vyjadrenie*

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}.$$

Z druhej rovnice dostanem

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}.$$

U: Nepripomína to to niečo?

Ž: *Ale áno, vyzerá to ako rovnica lineárnej funkcie.*

U: Presne tak. Zistili sme teda, že jednoduchými ekvivalentnými úpravami dokážeme sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi prepísať do tvaru sústavy dvoch lineárnych funkcií.

U: A môžeme prejsť ku grafom, pretože vieme, že...

Ž: *...grafom lineárnej funkcie je priamka.*

U: Pre úplnosť dodám, že graficky vieme znázorniť aj rovnice s jednou neznámou. Tie by nám mohli vzniknúť, ak by v našej sústave boli niektoré koeficienty nulové. Najprv sa pozrime na prípad rovnice

$$y = c.$$

Ž: *To je rovnica konštantnej funkcie. Jej grafom je priamka rovnobežná s osou x.*

U: Výborne! Prejdime na rovnicu typu

$$x = c.$$

Ž: *Všetky body, ktoré majú rovnakú x-ovú súradnicu ležia na priamke rovnobežnej s osou y. Lenže tá nepredstavuje graf funkcie!*

U: Máš pravdu, takáto priamka nie je grafom žiadnej funkcie. Vieme ju však zostrojiť a to nám stačí. Vráťme sa teda naspäť k tomu, že graficky hľadáme riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc.

Ž: *Už sme povedali, že každej rovnici vieme priradiť priamku, teda na obrázku nám vzniknú dve priamky. Aha, myslím, že viem, čo bude nasledovať – jednoducho sa pozrieme, kde sa tie dve priamky preťali a budeme mať výsledok!*

U: Podstatu si celkom dobre vystihol, vyskúšajme to najprv na jednom konkrétnom príklade a potom sa ešte vrátime k niektorým detailom.

U: Graficky rieš sústavu lineárnych rovníc v $\mathbb{R}^2$, teda v karteziánskom súčine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x + y = 4$$

$$2x - y = 5.$$

Ž: *Dobre, tak začnem prvou rovnicou, prepíšem si ju do tvaru lineárnej funkcie*

$$y = -x + 4$$

a keďže viem, že jej grafom je priamka, stačí mi na jej zostrojenie poznať dva body. Pripravím si ich do tabuľky:

x	0	4
y	4	0

U: Vidím, že si si šikovne zvolil priesečníky s osami.

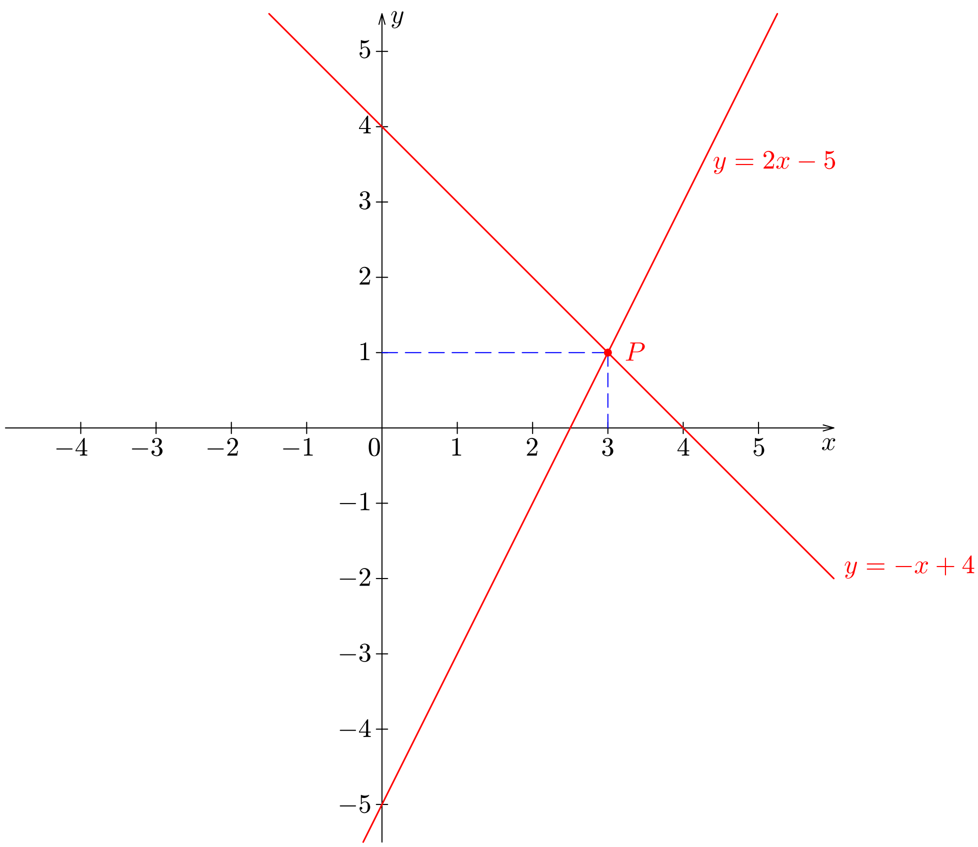
Ž: *Podobne to bude aj s druhou rovnicou, kde*

$$y = 2x - 5.$$

Aj tu si pripravím dva body

x	0	2,5
y	-5	0

U: Môžeš do jedného obrázka nakresliť oba grafy a vznikne toto:



Ž: *Priesečník je jasný – je to bod* $P\,[3; 1]$.

U: Je to bod, ktorý leží na oboch grafoch, teda jeho súradnice vyhovujú obom daným rovniciam. Pre istotu by sme však mali urobiť skúšku správnosti.

Ž: *Skúšku? A načo?*

U: Nepoužívali sme len ekvivalentné úpravy, ale sme aj kreslili. Čo keď v skutočnosti nie je riešením $[3; 1]$, ale $[2{,}9; 1{,}05]$?

Ž: *To sa mi nepáči, načo mi je potom taká metóda?*

U: Uznávam, že grafická metóda má isté obmedzenia, niekedy však môže dobre poslúžiť, napríklad pri riešení lineárnych optimalizačných úloh. Takže sa nedurdi a urob radšej tú skúšku.

Ž: *No dobre, tak ju urobím zvlášť pre pravú a ľavú stranu každej z rovníc:*

$$Ľ_1 = x + y = 3 + 1 = 4; \quad P_1 = 4; \quad Ľ_1 = P_1$$

$$Ľ_2 = 2x - y = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5; \quad P_2 = 5; \quad Ľ_2 = P_2$$

No vidíte, predsa som mal pravdu, je to riešenie.

U: Áno, a keďže našou úlohou bolo riešiť sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi, výsledok zapíšeme takto:

$$\mathcal{K} = \{[3; 1]\}\,.$$

U: V predchádzajúcej úlohe sme sa stretli so situáciou, keď grafmi príslušných lineárnych funkcií boli dve rôznobežné priamky, ktoré mali jeden spoločný bod. Skús sa teraz zamyslieť nad tým, aké ďalšie možnosti by mohli nastať.

Ž: *Mohlo by sa stať, že by nám vyšli dve rovnobežky, tie nemajú spoločný bod, teda to by znamenalo, že sústava rovníc nemá riešenie.*

U: Súhlasím, a ešte?

Ž: *Ešte? Rôznobežky boli, rovnobežky tiež...*

U: Presnejšie by sme mohli povedať, že dve rôzne rovnobežky, pretože treťou možnosťou je situácia, keď obe priamky splynú, sú totožné.

Ž: *No to je dosť čudná situácia, veď to ako keby som mal len jednu priamku.*

U: Nezabudni však, že v skutočnosti riešiš sústavu dvoch lineárnych rovníc.

Ž: *Aha, takže potom má sústava nekonečne veľa riešení, pretože každý bod, ktorý leží na tejto „zdvojenej“ priamke predstavuje riešenie.*

U: Presne tak, môžeme teda naše úvahy zhrnúť takto:

Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi má

- ***jediné riešenie*** práve vtedy, ak grafy príslušných lineárnych funkcií sú rôznobežné priamky
- ***nekonečne veľa riešení*** práve vtedy, ak grafy príslušných lineárnych funkcií sú totožné priamky
- ***nemá riešenie*** práve vtedy, ak grafy príslušných lineárnych funkcií sú rôzne rovnobežky

---

U: Graficky vieme znázorniť aj riešenie lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi. Nech je daná jedna z nerovníc

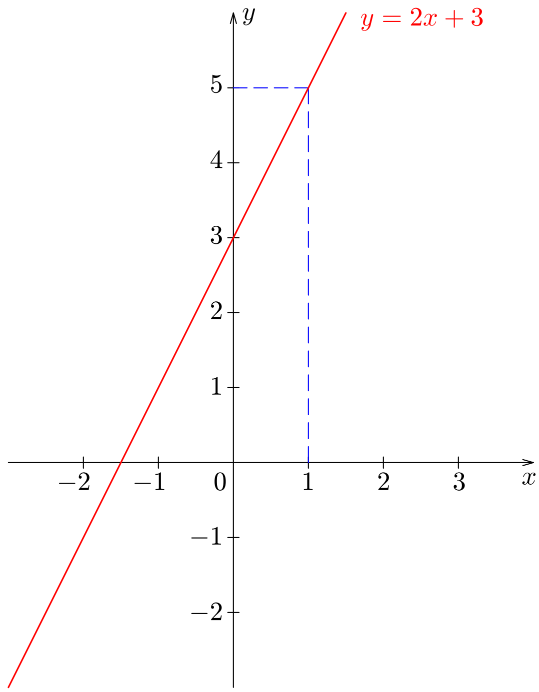
$$y < f(x), \quad y > f(x), \quad y \leqq f(x), \quad y \geqq f(x),$$

kde f je lineárna funkcia.
Ukážeme si to na príklade nerovnice

$$y < 2x + 3.$$

Najprv zostrojíme graf funkcie $y = f(x)$. Môžeš to urobiť.

Ž: *Čiže mám zostrojiť graf funkcie $y = 2x + 3$. To je ľahké, grafom je priamka prechádzajúca bodmi $[0; 3]$ a $[1; 5]$. Tu je obrázok:*



U: Teraz nájdi niekoľko riešení našej nerovnice. Teda niekoľko bodov, ktorých súradnice spĺňajú podmienku $y < 2x + 3$.

Ž: *Napríklad body* $[5; 0]$, $[1; 0]$, $[1; 1]$. . . *Myslím, že sú to body, ktoré ležia pod našou priamkou. Lebo napríklad bod* $[-2; 3]$, *ktorý leží nad priamkou, nám už nevyhovuje.*

U: Máš pravdu. Graf funkcie $y = f(x)$ rozdelil rovinu na dve polroviny. Jedna z nich obsahuje všetky usporiadané dvojice, ktoré sú koreňmi nerovnice.

Ž: *Ako zistíme, ktorá z polrovín to bude?*

U: Dosadíme jeden konkrétny bod, ktorý neleží na grafe funkcie, do nerovnice. Výhodné je napríklad dosadzovať bod $[0; 0]$.

Ž: *Skúsim to. Dosadím bod* $[0; 0]$ *do mojej nerovnice* $y < 2x + 3$ *a dostanem* $0 < 3$. *To platí.*

U: Teda riešením je tá polrovina, z ktorej si vybral bod.

Ž: *A keby som dostal nepravdivý výrok, riešením by bola druhá polrovina?*

U: Presne tak. Ešte doplním, že v prípade ostrých nerovníc typu

$$y < f(x), \quad y > f(x)$$

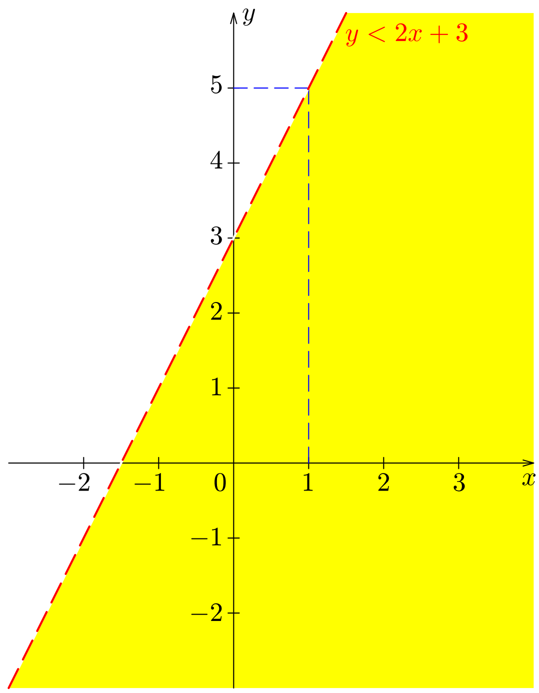
hraničná priamka $y = f(x)$ nepatrí do oboru pravdivosti nerovnice. Preto ju vyznačíme čiarkovanou čiarou. V prípade neostrých nerovníc typu

$$y \leqq f(x), \quad y \geqq f(x)$$

je grafickým znázornením riešenia polrovina aj s hraničnou priamkou.

Ž: *Dokončím teda moju úlohu – hraničná priamka je vyznačená čiarkovanou čiarou.*

U: Na nasledujúcom obrázku je žltou farbou vyznačená množina všetkých usporiadaných dvojíc, ktoré sú koreňmi nerovnice $y < 2x + 3$.



U: Teraz, keď už vieš graficky znázorniť riešenie jednej lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi, hravo zvládneš aj sústavu takýchto nerovníc.

Ž: *Samozrejme. Najprv do jedného obrázka zostrojím grafické znázornenie riešení jednotlivých nerovníc. To sú isté polroviny. A potom si uvedomím, že hľadám body, ktoré vyhovujú každej z nerovníc, teda vyznačím prienik všetkých polrovín.*

U: Výborne.

Príklad 1: *Graficky riešte v $\mathbb{R}^2$ sústavy rovníc:*

$$\text{a) } \begin{aligned} x+2y &= 7 \\ 5x+4y &= 11 \end{aligned} \qquad \text{b) } \begin{aligned} 2x-4y &= 8 \\ -x+2y &= 4 \end{aligned} \qquad \text{c) } \begin{aligned} 3x+y &= 6 \\ x+\frac{y}{3} &= 2. \end{aligned}$$

Ž: *Začnem prvou sústavou*

$$x+2y=7$$

$$5x+4y=11.$$

Najprv z prvej rovnice vyjadrím y, dostanem

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2},$$

čo predstavuje lineárnu funkciu. Preto viem, že jej grafom je priamka a na jej určenie mi stačia dva body, napríklad takéto:

x	0	1
y	$\frac{7}{2}$	3

To isté spravím s druhou rovnicou, teda najprv vyjadrím y takto:

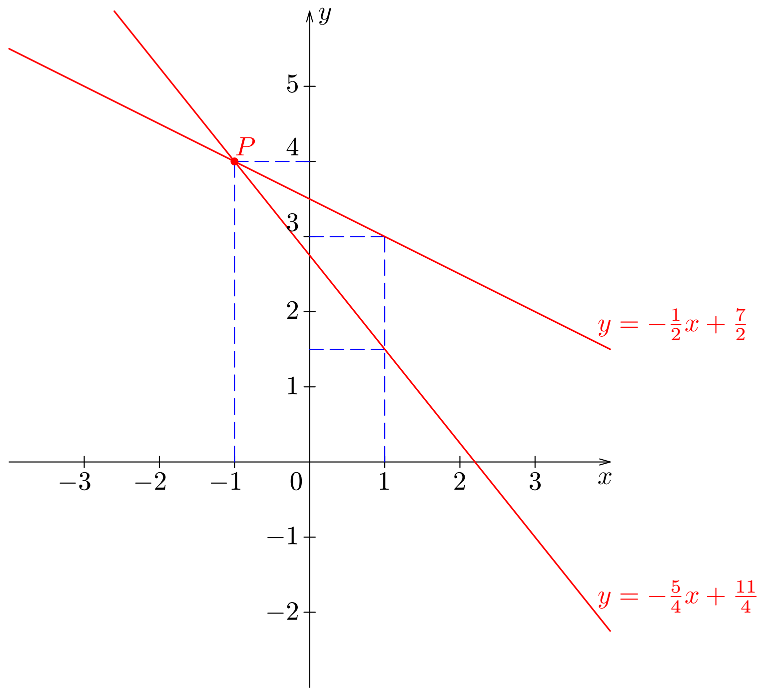
$$y=-\frac{5}{4}x+\frac{11}{4}$$

a potom k tomu nájdem dva body. Nechcem tam veľmi mať štvrtiny, tak skúsim ... napríklad takto:

x	-1	1
y	4	$\frac{3}{2}$

U: Celkom dobre ti to vyšlo, môžeš zostrojiť grafy.

Ž: *Tu sú a vidno z toho, že sa obe priamky pretli v bode $P\,[-1;4]$.*



U: Nezabudni však na skúšku správnosti.

Ž: *Čiže dosadím do pôvodných rovníc za x číslo -1 a za y číslo 4:*

$$Ľ_1 = x + 2y = -1 + 2 \cdot 4 = -1 + 8 = 7, \quad P_1 = 7, \quad Ľ_1 = P_1$$

$$Ľ_2 = 5x + 4y = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 = -5 + 16 = 11, \quad P_2 = 11, \quad Ľ_2 = P_2$$

U: Takže môžeme napísať

$$\mathcal{K} = \{[-1; 4]\}\,.$$

Ž: *Môžem prejsť na druhú sústavu*

$$2x - 4y = 8$$

$$-x + 2y = 4.$$

Takisto najprv z prvej rovnice vyjadrím y, dostanem

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

a k tomu si pripravím do tabuľky dva body ležiace na grafe získanej funkcie:

x	0	2
y	-2	-1

U: Zrejme to isté zopakuješ s druhou rovnicou.

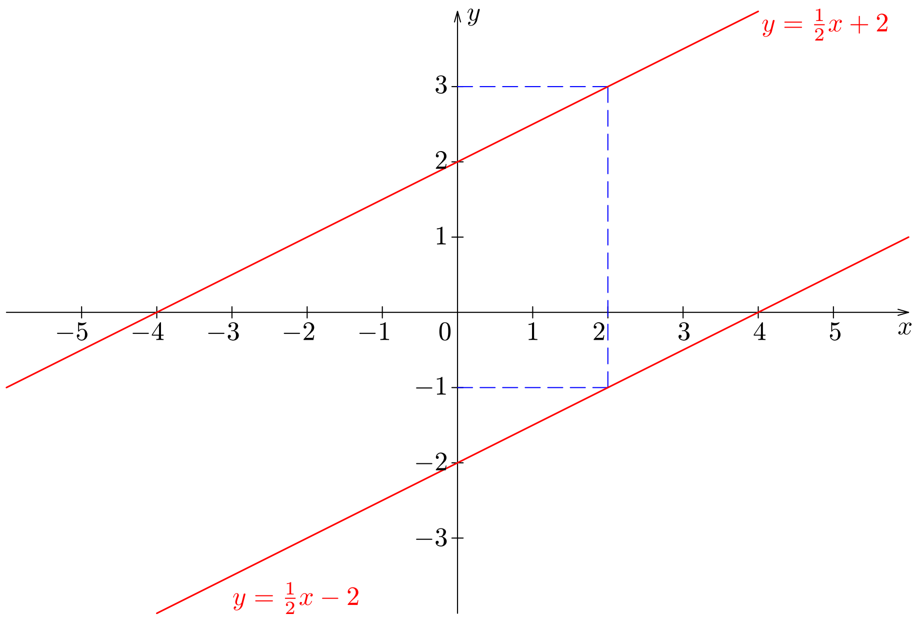
Ž: *Samozrejme, dostanem*

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

a do tabuľky si dám takéto hodnoty:

x	0	2
y	2	3

U: A tu je obrázok so zostrojenými grafmi:



Ž: *Veď sú to rovnobežky, teda táto sústava nemá riešenie!*

U: Áno, symbolicky zapíšeme

$$\mathcal{K} = \emptyset.$$

To, že sústava nebude mať riešenie si si mohol uvedomiť už skôr – z rovníc lineárnych funkcií

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

predsa vidno, že ich grafy budú rovnobežky. Vieš prečo?

Ž: *Keď ste ich napísali takto pod seba, už to vidím aj ja – koeficienty pri x sú v oboch rovniciach rovnaké, preto majú priamky rovnaký sklon.*

U: Ja pre úplnosť dodám, že absolútne koeficienty, čiže čísla 2 a -2 v rovniciach týchto funkcií sú rôzne, preto grafy budú rôzne rovnobežky.

Ž: *Tak už mi ostala len posledná sústava rovníc:*

$$3x + y = 6$$
$$x + \frac{y}{3} = 2.$$

Zopakujem predchádzajúci postup – z prvej rovnice vyjadrím

$$y = -3x + 6.$$

Grafom tejto funkcie je priamka a k tomu si pripravím jej priesečníky s osami:

x	0	2
y	6	0

No a ešte druhú rovnicu vynásobím tromi a potom vyjadrím y:

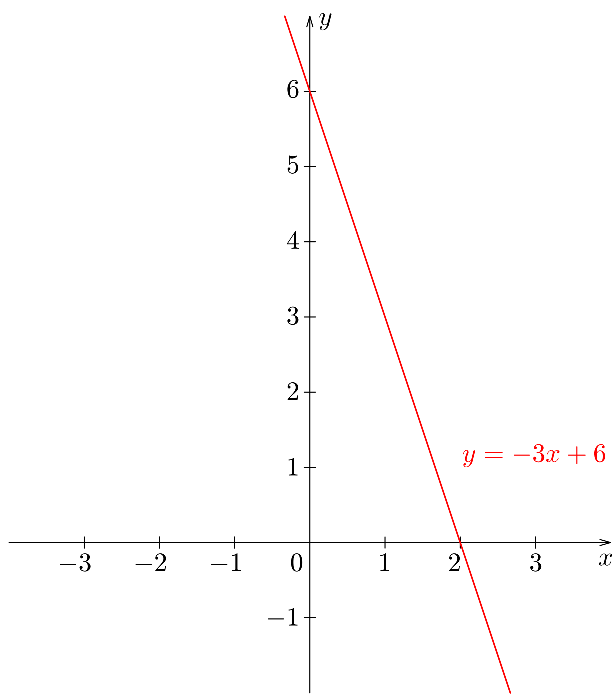
$$y = -3x + 6.$$

No moment, dostal som takú istú funkciu!

U: Čo z toho vyplýva?

Ž: *Z toho vyplýva, že grafy nemusím kresliť, lebo to budú dve totožné priamky.*

U: Ja som to predsa len pre istotu nakreslil, vyzerá to takto:



Ako to bude s riešeniami našej sústavy?

Ž: *Bude ich mať nekonečne veľa.*

U: Takže zapíšeme
$$\mathcal{K} = \mathbb{R}^2\,?$$

Ž: *Áno.*

U: Nie.

Ž: *Prečo zase?*

U: Porozmýšľaj – podľa teba vyhovuje každá usporiadaná dvojica reálnych čísel. Teda aj $[0; 0]$ alebo $[4; 5]$? Pozri sa na graf.

Ž: *Nesedí to. Ale aj tak je predsa nekonečne veľa riešení!*

U: To som nepoprel. Ide len o to, ako šikovne zapísať, že nám vyhovujú iba tie usporiadané dvojice, ktorých obrazy ležia na našej priamke.

Ž: *Tak to neviem, ako to zapísať.*

U: Jednoducho, x-ová súradnica sa môže meniť ľubovoľne, ale každému x odpovedá jediné y podľa vzťahu, ktorý si sám našiel:
$$y = -3x + 6.$$
Preto výsledok zapíšeme takto:
$$\mathcal{K} = \{[x; -3x + 6]\,, x \in \mathbb{R}\}\,.$$
Prípadne použijeme zápis
$$\mathcal{K} = \left\{\left[\frac{6-y}{3}; y\right], y \in \mathbb{R}\right\}.$$
Ten vystihuje situáciu, ak y-ovú súradnicu ľubovoľne meníme, ale každému y odpovedá jediné x podľa vzťahu $x = \dfrac{6-y}{3}$.

Úloha 1: *Graficky riešte v* $\mathbb{R}^2$ *sústavy rovníc:*

a) $\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y + 2 &= 0 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2y - 3 &= x \\ \frac{1}{2}x - y &= 1 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} \frac{y}{2} &= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \\ 4y &= 3x + 2. \end{aligned}$

Výsledok: a) $\left[1; -\dfrac{9}{2}\right]$, b) $\emptyset$, c) $\left\{\left[x; \dfrac{3x+2}{4}\right], x \in \mathbb{R}\right\}$

Príklad 2: *Riešte graficky v $\mathbb{R}^2$ sústavu rovníc:*

$$(x+3)(y-1) = (x-1)(y+2)$$

$$(x-2)(y+4) = (x+7)(y-2)\,.$$

Ž: *Asi niet inej pomoci, než to začať upravovať. Takže najprv roznásobím zátvorky a dostanem:*

$$\begin{aligned} xy - x + 3y - 3 &= xy + 2x - y - 2 \\ xy + 4x - 2y - 8 &= xy - 2x + 7y - 14. \end{aligned}$$

U: Výrazy na oboch stranách síce nie sú lineárne, ale práve nelineárny člen xy môžeme od oboch strán odčítať.

Ž: *Aj ostatné členy môžem z pravej strany odčítať. Dostanem*

$$\begin{aligned} -3x + 4y - 1 &= 0 \\ 6x - 9y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

a tú druhú rovnicu ešte predelím tromi, aby som mal menšie čísla. Teda

$$\begin{aligned} -3x + 4y - 1 &= 0 \\ 2x - 3y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

U: A to už je celkom pekná sústava dvoch lineárnych rovníc, ktorú máme riešiť graficky.

Ž: *Najprv z oboch rovníc vyjadrím y:*

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

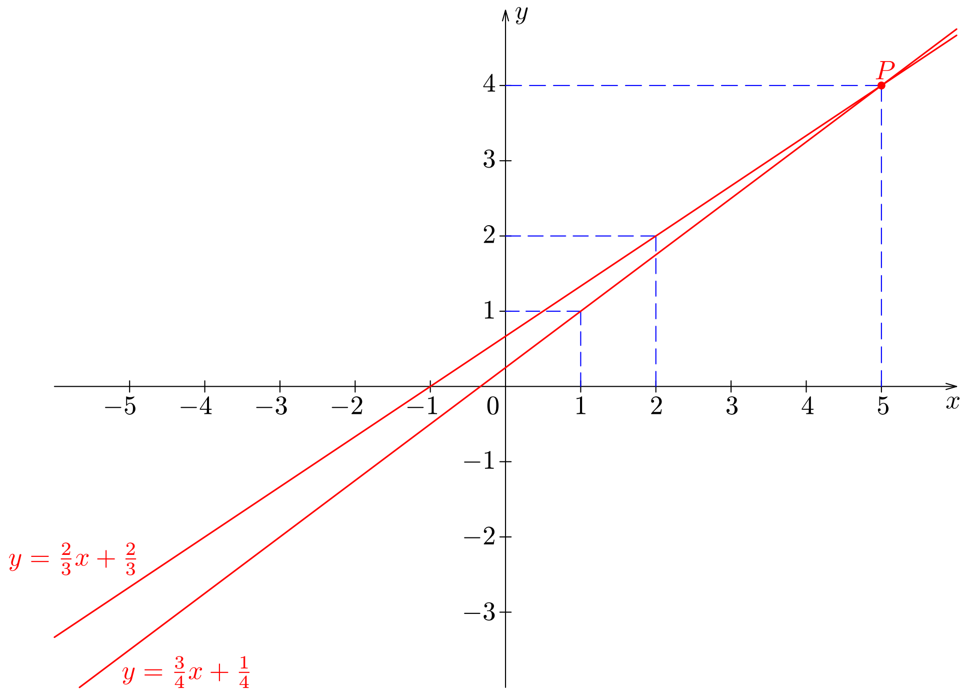
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Tým som získal vyjadrenia lineárnych funkcií. Ich grafy sú priamky, pripravím si po dva body, ktoré nanesiem do grafu:

x	0	1
y	$\frac{1}{4}$	1

x	-1	2
y	0	2

Môžem to hneď nakresliť, tu je výsledok:



U: Dobre, teda podľa teba je riešením...

Ž: *... usporiadaná dvojica* $[5; 4]$*. Ale pre istotu to overím skúškou, predsa len na tom grafe to nie je až také jednoznačné.*

U: Súhlasím.

Ž: *Takže dosadzujem do rovníc v zadaní za* x *číslo* 5 *a za* y *číslo* 4*:*

$$Ľ_1 = (5 + 3)(4 - 1) = 8 \cdot 3 = 24$$

$$P_1 = (5 - 1)(4 + 2) = 4 \cdot 6 = 24$$

$$Ľ_1 = P_1$$

$$Ľ_2 = (5 - 2)(4 + 4) = 3 \cdot 8 = 24$$

$$P_2 = (5 + 7)(4 - 2) = 12 \cdot 2 = 24$$

$$Ľ_2 = P_2$$

Vyšlo to!

U: Výborne, môžeme teda zapísať, že

$$\mathcal{K} = \{[5; 4]\}\,.$$

Úloha 2: *Riešte graficky v $\mathbb{R}^2$ sústavu rovníc:*

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} - \frac{y+2}{3} &= 1 \\ x - y - 1{,}5 &= 5 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Výsledok: $\mathcal{K} = \left\{ \left[x; \frac{3x-13}{2} \right], x \in \mathbb{R} \right\}$

Príklad 3: *Spotrebiteľ chce kúpiť väčšie množstvo istého druhu tovaru, najviac však 70 kg. Má dve možnosti nákupu:*

1. *Tovar kúpi v predajni v bezprostrednej blízkosti svojho bydliska, kde za 1 kg zaplatí 2,20 €.*
2. *Zájde svojím autom k výrobcovi, u ktorého 1 kg tohto tovaru stojí iba 1,90 €. Musí však navyše zaplatiť za benzín – dopredu si spočítal, že to bude 11,50 €.*

Pri akom množstve tovaru bude pre spotrebiteľa finančne výhodnejšie nakúpiť tovar priamo u výrobcu? (Nepočítame stratu času ani amortizáciu auta.) Úlohu riešte graficky aj výpočtom.

Ž: *Celkom zaujímavá úloha, tipoval by som, že je výhodnejšie ísť tam, kde je to lacnejšie, najmä pri väčšom nákupe.*

U: Znie to logicky, otázne je však práve to, kedy to začne byť výhodnejšie.

Ž: *Tak sa do toho pusťme. Najprv si zavediem označenie – keďže zaplatená suma závisí od množstva kúpeného tovaru, urobím to takto:*

x ... *množstvo tovaru v kilogramoch*
y ... *celkové náklady v eurách*

Teraz ešte nájsť závislosť. Začnem tým jednoduchším prípadom, ak by sa tovar nakupoval v predajni. Tam sa za 1 kilo zaplatí 2,20 €, teda za x kilogramov to bude $2{,}2x$.

U: Áno, dostávame teda rovnicu prvej funkcie

$$f_1 : y = 2{,}2x,$$

čo je rovnica priamej úmernosti. Ako bude vyzerať jej graf?

Ž: *Grafom priamej úmernosti je priamka, na jej zostrojenie si pripravím hoci aj takéto dva body:*

x	0	10
y	0	22

U: S tými dvoma bodmi súhlasím, ale s tou priamkou veru nie.

Ž: *Čo zase ... Aha, spotrebiteľ chce kúpiť najviac 70 kilogramov a zrejme nebude kupovať záporné množstvá. Teda definičný obor je*

$$\mathcal{D}(f_1) = \langle 0; 70 \rangle .$$

Preto grafom nie je priamka, ale len úsečka.

U: Teraz to je v poriadku, skús ešte druhú možnosť nákupu.

Ž: *Pri druhej možnosti, keď pôjde po tovar k výrobcovi, zaplatí za každé kilo tovaru* 1,90 €*, teda za* x *kilogramov to bude* $1{,}9x$*, ale ešte musíme pripočítať náklady na benzín, teda dostávam rovnicu*

$$f_2 : y = 1{,}9x + 11{,}5.$$

A to je rovnica lineárnej funkcie, teda jej grafom je priamka. Opravujem sa, úsečka, pretože

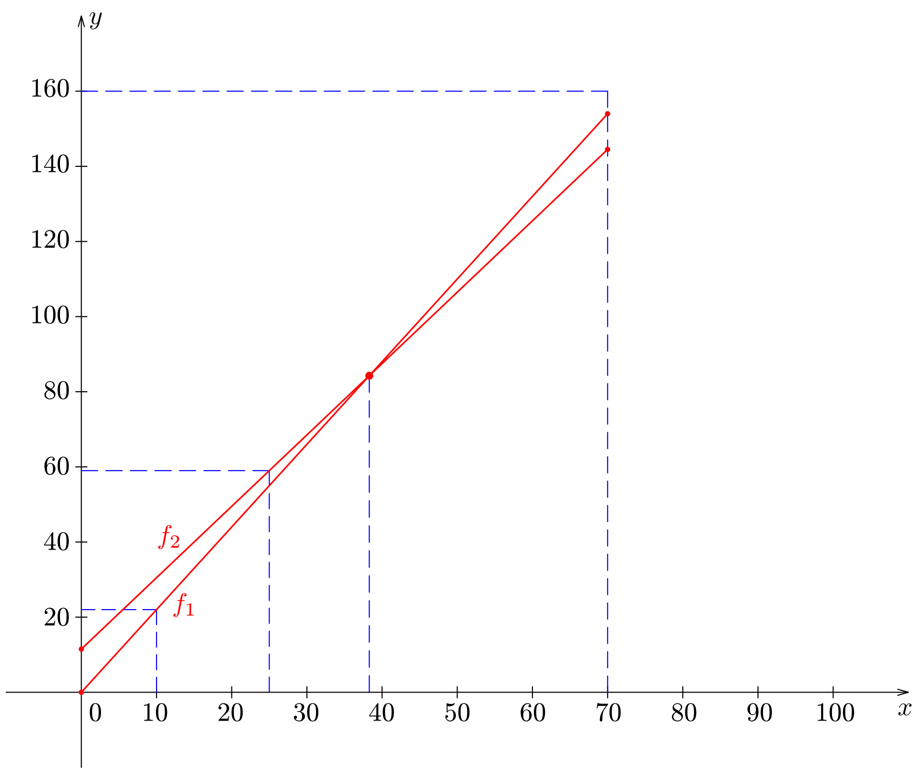
$$\mathcal{D}(f_2) = \langle 0; 70 \rangle \,.$$

U: Na jej zostrojenie budeš opäť potrebovať dva body.

Ž: *Napríklad takéto:*

x	0	25
y	11,5	59

A môžem sa pustiť do kreslenia grafov. Tu je výsledok:



U: Dobre, a teraz skús interpretovať, čo vidíš.

Ž: *Zdá sa, že sa grafy pretínajú niekde okolo hodnoty* $x = 38$*, ale úplne presné to nie je.*

U: Tak to skúsme overiť výpočtom.

Ž: *Dobre, chcem vedieť, kedy je to cenovo rovnako, či kúpi doma alebo pôjde k výrobcovi. Takže má platiť*

$$2{,}2x = 1{,}9x + 11{,}5.$$

Odtiaľ mi vyjde

$$x = 38\frac{1}{3}.$$

U: Výborne, teda pre spotrebiteľa je výhodnejšie zájsť po tovar k výrobcovi, ak ho chce kúpiť viac ako 38 kilogramov.

Ž: *Čím viac pritom nakúpi, tým to bude výhodnejšie, pretože grafy sa od seba vzďaľujú. Najvýhodnejšie to bude pre $x = 70$.*

Úloha 3: *Nákladné auto vyšlo po ceste o 8 hodine ráno z mesta M smerom do mesta N. Išlo priemernou rýchlosťou 50 km/h. O 9^{30} hod za ním vyšlo tiež z mesta M osobné auto priemernou rýchlosťou 80 km/h.*
a) Kedy a v akej vzdialenosti od mesta M dostihne osobné auto nákladné auto?
b) Zistite, či to bude pred alebo za mestom N, ktoré je od mesta M vzdialené 150 kilometrov. Úlohu riešte graficky.

Výsledok: a) o 12. hodine vo vzdialenosti 200 km, b) za mestom N

Príklad 4: *V roku 2007 si domáci odberatelia elektrickej energie v Slovenskej republike mohli vybrať jednu z týchto sadzieb (ceny sú uvedené bez DPH):*

- *ŠTANDARD MINI – pozostáva z pevnej mesačnej platby* 30 *Sk na mesiac a z platby* 4,50 *Sk za* 1 *kWh spotrebovanej energie.*
- *ŠTANDARD MAXI – pozostáva z pevnej mesačnej platby* 149 *Sk na mesiac a z platby* 3,40 *Sk za* 1 *kWh spotrebovanej energie.*

Určte graficky, ktorá sadzba je výhodnejšia pri ročnej spotrebe 700 *resp.* 1400 *kWh.*

U: Zaujímal si sa niekedy o to, koľko doma platíte za elektrinu?

Ž: *Pravdu povediac, ani nie. Samozrejme viem, že keď nechám všade rozsvietené, budeme platiť viac. To mi mama stále pripomína, ale koľko presne, to neviem.*

U: Tak potom asi nevieš ani to, že si môžeš vybrať z viacerých možností a je dobré vedieť vypočítať, ktorá je pre vašu domácnosť výhodnejšia.

Ž: *To znie zaujímavo, žeby predsa tie funkcie na niečo boli?*

U: Isteže, tak poďme na to.

Ž: *Najprv si ešte raz prečítam text ... Niečo mi tu nesedí. Hovorí sa o poplatkoch za mesiac, ale v otázke je ročná spotreba. Tak ako?*

U: Presne tak, ako to v praxi funguje – každý mesiac platíte určitý poplatok za elektrinu, je to vlastne záloha. A raz za rok sa zisťuje celková ročná spotreba, na základe ktorej sa urobí vyúčtovanie. A buď vám vrátia preplatok, alebo od vás pýtajú nedoplatok.

Ž: *To mi niečo hovorí.*

U: To som rád a teraz už poďme úlohu matematicky zapísať. Aké premenné v nej vystupujú?

Ž: *Spotreba energie v kWh, ak som dobre pochopil tak za rok, tú si označím písmenom* x. *No a písmenom* y *si označím sumu, ktorú treba zaplatiť za mesiac ... alebo za rok? Zase neviem.*

U: Za rok, budeme sa na to dívať z pohľadu ročného zúčtovania.

Ž: *No dobre. Takže pri prvej sadzbe ŠTANDARD MINI zaplatíme každý mesiac* 30 *Sk, čiže za rok* 360 *Sk a k tomu ešte* 4,50 *Sk za* 1 *kWh. Teda za* x *kWh to bude* $4{,}5x$ *a spolu dostávam vzťah*

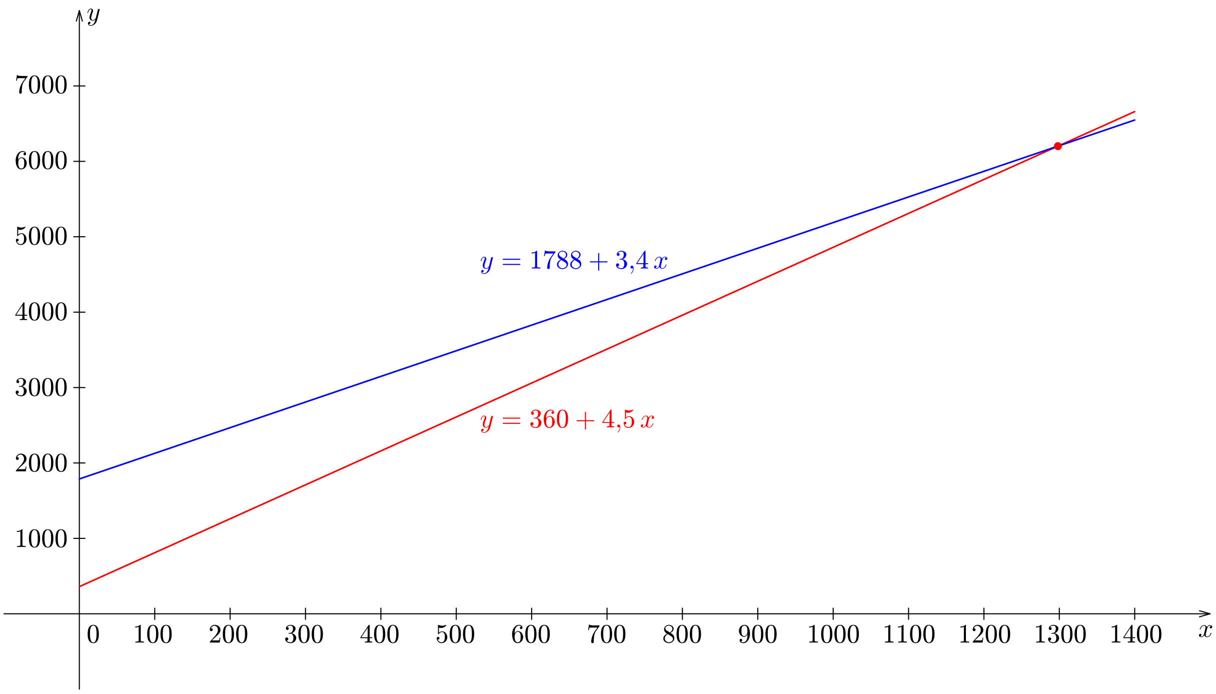
$$y = 360 + 4{,}5x.$$

U: Veľmi dobre, pokračuj.

Ž: *Pri sadzbe ŠTANDARD MAXI zaplatíme každý mesiac* 149 *Sk, čiže za rok* $12 \cdot 149 = 1788$ *Sk a k tomu ešte* 3,40 *Sk za* 1 *kWh. Bude to podobná rovnica*

$$y = 1788 + 3{,}4x.$$

U: Výborne, v oboch prípadoch to sú lineárne funkcie, ich grafmi sú polpriamky, keďže definičný obor sú len nezáporné čísla. A tu je obrázok:



U: Z grafov máme určiť, ktorá sadzba je výhodnejšia pri spotrebe 700 resp. 1400 kWh ročne.

Ž: *Výhodnejšie je samozrejme zaplatiť menej, pri hodnote* $x = 700$ *dáva nižšiu hodnotu prvá funkcia* $y = 360 + 4{,}5x$*, ale pri spotrebe* 1400 *kWh už dáva menšiu hodnotu druhá funkcia* $y = 1788 + 3{,}4x$*. Takže pri spotrebe 700 kWh je výhodnejšia sadzba ŠTANDARD MINI a pri spotrebe 1400 kWh zase sadzba ŠTANDARD MAXI.*

U: Výborne, ja len dodám, že nie je veľmi ťažké vypočítať, že sadzba ŠTANDARD MINI je výhodnejšia len pri spotrebe do 1298 kWh ročne.

Príklad 5: *Graficky riešte v $\mathbb{R}^2$ sústavy:*

a) $\begin{aligned} y - x &\geqq 0 \\ y - 3x &\leqq 0 \\ x &\leqq 2 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x + y &< -5 \\ y &= 1{,}5x. \end{aligned}$

Ž: *V prvej časti mám graficky riešiť sústavu troch jednoduchých lineárnych nerovníc. Pozriem sa na každú z nich zvlášť. Začnem nerovnicou*

$$y - x \geqq 0.$$

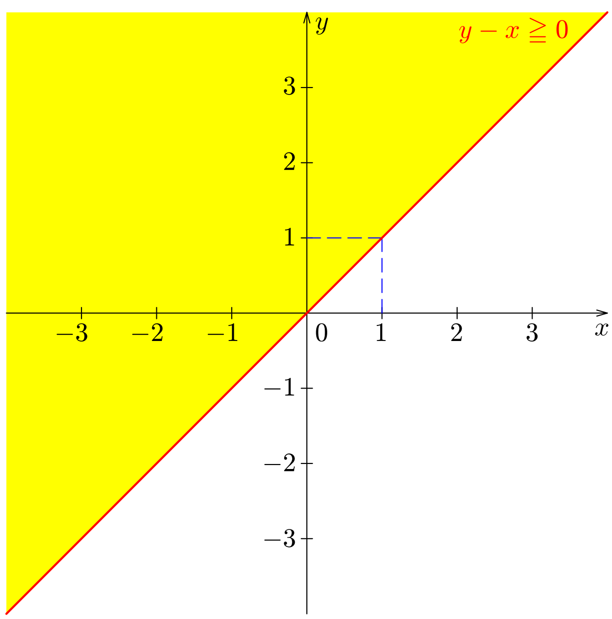
Zostrojím hraničnú priamku $y = x$ pomocou bodov $[1; 1]$ a $[0; 0]$.

U: Tým sa ti rovina rozdelí na dve polroviny. Ako rozhodneš, ktorá z nich ti vyhovuje?

Ž: *Jednoducho, dosadím do nerovnice bod $[0; 0]$. Hops! Bod $[0; 0]$ leží na hraničnej priamke, takže to nebol najlepší nápad.*

U: Nič sa nedeje, treba zobrať iný bod.

Ž: *Tak napríklad bod $[0; 1]$. Keď ho dosadím do mojej nerovnice $y - x \geqq 0$, dostanem $1 \geqq 0$. A to platí, teda polrovina, v ktorej leží bod $[0; 1]$ znázorňuje všetky riešenia prvej nerovnice. Tu je k tomu obrázok:*



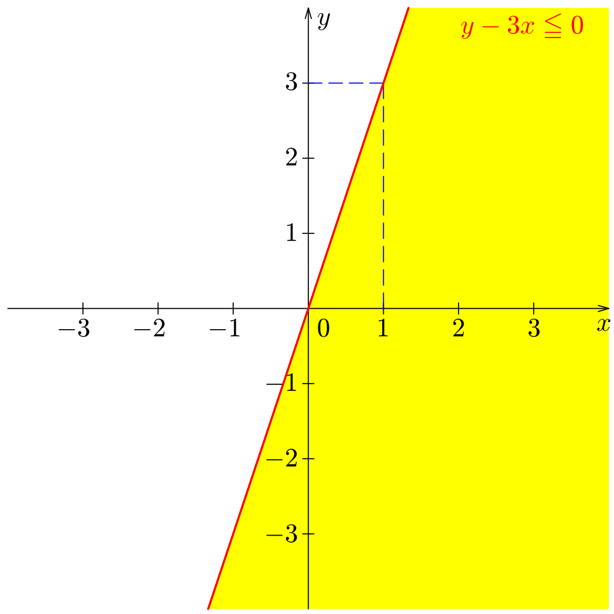
U: Výborne, rovnakým spôsobom zvládneš aj ďalšie nerovnice.

Ž: *Druhá nerovnica je*

$$y - 3x \leqq 0.$$

Zostrojím hraničnú priamku $y = 3x$. Potom si vezmem nejaký bod, ktorý na nej neleží, napríklad bod $[1; 4]$. Dosadím jeho súradnice do nerovnice $y - 3x \leqq 0$ a dostanem $1 \leqq 0$. To neplatí, teda polrovina, z ktorej som vybral bod mi nevyhovuje. Riešením bude druhá polrovina.

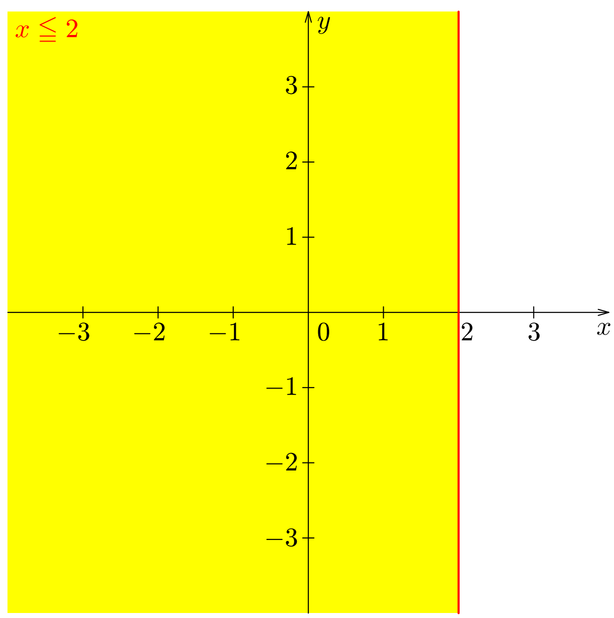
U: Na nasledujúcom obrázku to máme znázornené.



Ž: *Ešte mi ostala posledná nerovnica*

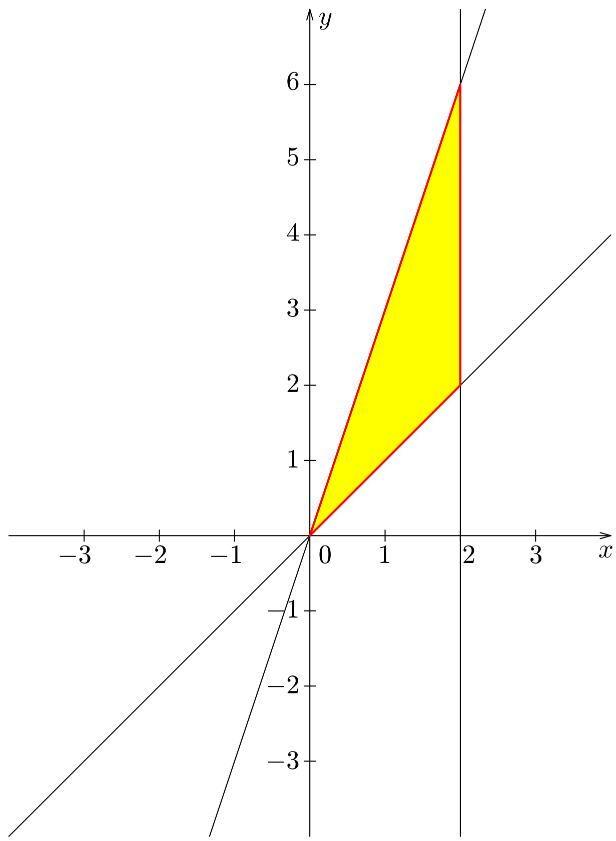
$$x \leqq 2.$$

Hraničná priamka $x = 2$ je kolmá na os x-ovú a pretína ju v bode 2. Všetky body, ktoré majú x-ovú súradnicu menšiu ako 2 ležia od nej naľavo, teda grafické znázornenie tretej nerovnice je takéto:



U: Veľmi dobre, ostáva už len dokončiť riešenie sústavy.

Ž: *To znamená, že nájdem prienik troch polrovín, ktoré som zakreslil pri jednotlivých nerovniciach. Výsledkom je takýto trojuholník:*



U: Riešením našej sústavy nerovníc sú teda všetky usporiadané dvojice čísel, ktorých obrazy ležia v danom trojuholníku, vrátane jeho hranice.

Ž: *Môžem sa pustiť do druhej úlohy. Opäť začínam nerovnicou, teraz je to*

$$2x + y < -5.$$

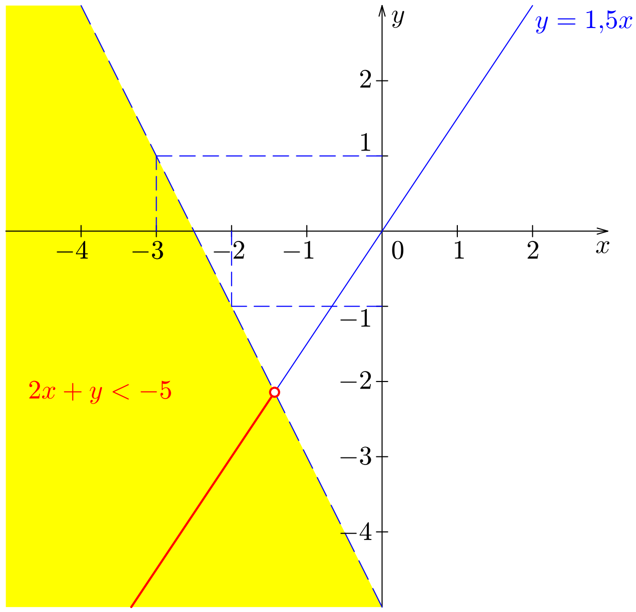
Takže najprv zostrojím hraničnú priamku $y = -2x - 5$ *pomocou bodov* $[-2; -1]$ *a* $[-3; 1]$*. Potom dosadím bod* $[0; 0]$ *do nerovnice. Dostal som vzťah* $0 < -5$*, čo neplatí. Teda vyznačím tú polrovinu, ktorá neobsahuje bod* $[0; 0]$*.*

U: Podotýkam, že hraničná priamka do množiny riešení nepatrí, keďže sme pracovali s ostrou nerovnicou.

Ž: *Pokračujem ďalej. Tu však nemám ďalšiu nerovnicu, ale rovnicu*

$$y = 1{,}5x.$$

Graficky znázorním priamku s rovnicou $y = 1{,}5x$ *a hľadám jej prienik s polrovinou. Tu je to nakreslené – riešením je červená polpriamka bez krajného bodu:*

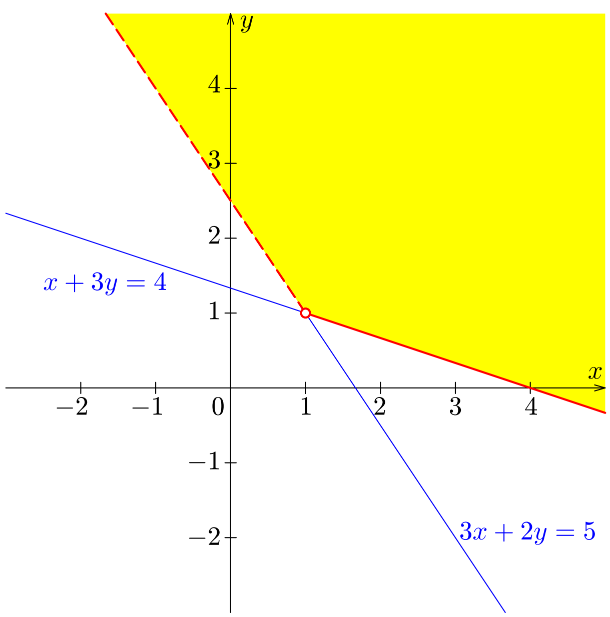


Úloha 5: *Graficky riešte v* $\mathbb{R}^2$ *sústavy:*

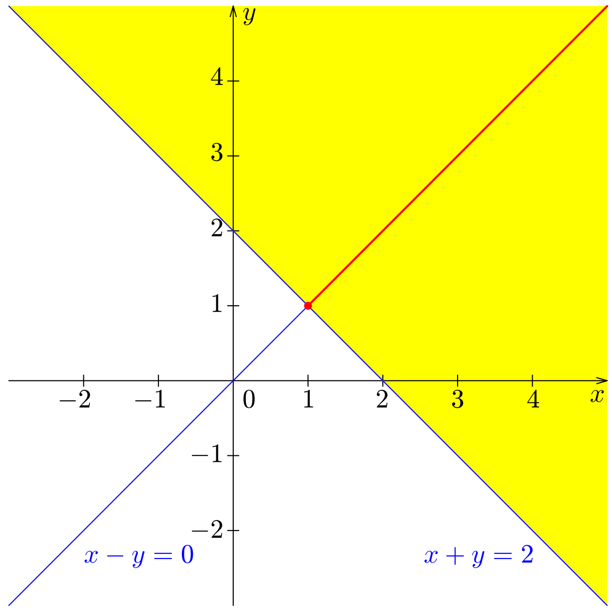
a) $\begin{aligned} x + 3y &\geqq 4 \\ 3x + 2y &> 5 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &\geqq 2x. \end{aligned}$

Výsledok:

a)



$b)$



Príklad 6: *Graficky riešte v $\mathbb{R}^2$ sústavu nerovníc:*

$$x + y \leqq 1$$

$$x - y \leqq 1$$

$$x + y \geqq -1$$

$$x - y \geqq -1.$$

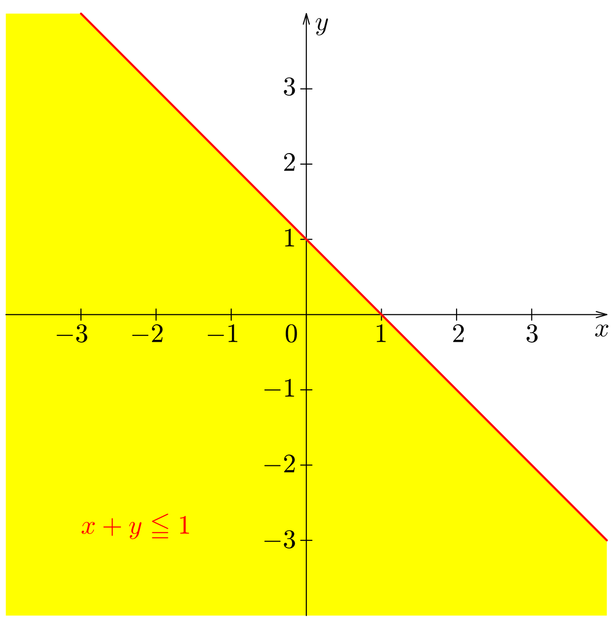
U: Na úvod si pripomeňme, ako graficky riešime sústavu nerovníc. Najprv graficky znázorníme množinu riešní každej z nerovníc a potom vyznačíme prienik týchto množín.

Ž: *Tie nerovničky vyzerajú celkom jednoducho, hneď sa pustím do prvej. Chcem teda graficky znázorniť riešenie nerovnice*

$$x + y \leqq 1.$$

Začnem zostrojením priamky s rovnicou $x+y=1$. Tá mi rozdelí rovinu na dve polroviny. O tom, ktorá z nich mi vyhovuje, rozhodnem pomocou hocijakého bodu neležiaceho na priamke. Najľahšie sa pracuje s bodom $[0;0]$. Takže do nerovnice $x+y \leqq 1$ dosadím za x aj za y nuly a dostanem $0 \leqq 1$. Toto je pravda, takže polrovina obsahujúca bod $[0;0]$ je grafickým vyjadrením prvej nerovnice.

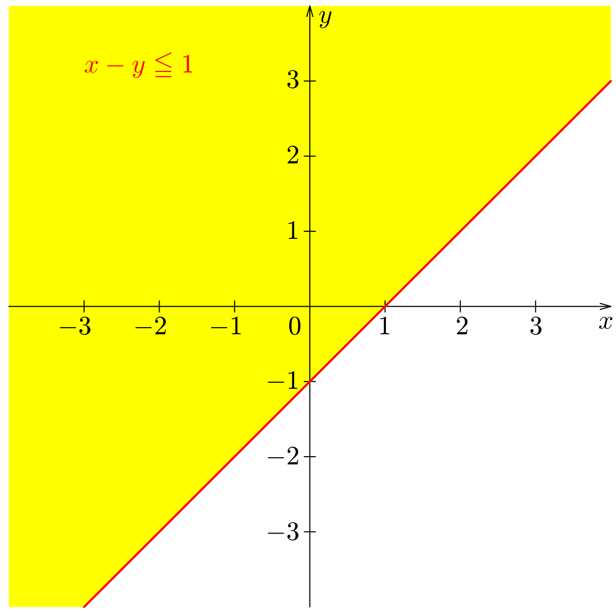
U: Ukážeme si to hneď aj na obrázku:



Ž: *Rovnako budem postupovať s druhou nerovnicou*

$$x - y \leqq 1.$$

Zostrojenie hraničnej priamky $x - y = 1$ zvládnem ľahko pomocou bodov $[2;1]$ a $[3;2]$. Potom napríklad pomocou bodu $[1;1]$ zistím, že riešením je polrovina, ktorá ho obsahuje.

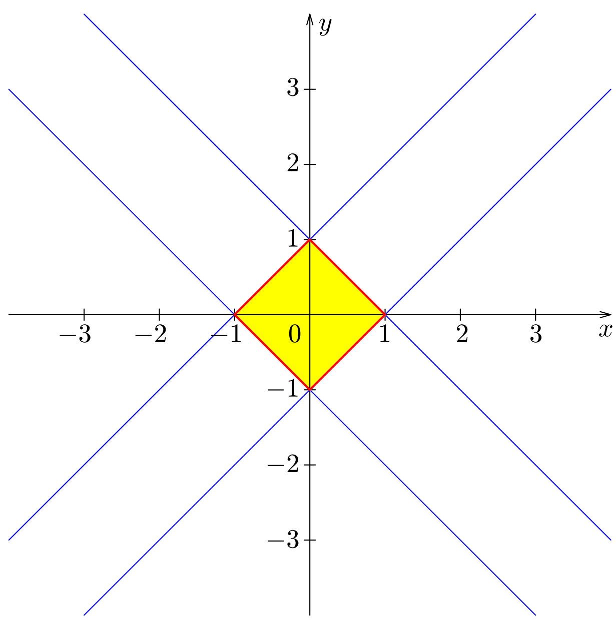


U: Ide ti to ako po masle, vidím, že tomu rozumieš.

Ž: *Rovnaký postup zvolím aj pri posledných dvoch nerovniciach*

$$x + y \geqq -1 \quad a \quad x - y \geqq -1.$$

Hraničné priamky sú $x + y = -1$ a $x - y = -1$. V oboch prípadoch bod $[0;0]$ patrí do hľadanej polroviny. Takže ak to všetko nakreslím aj s predchádzajúcimi dvoma polrovinami, ich prienikom je takýto útvar:



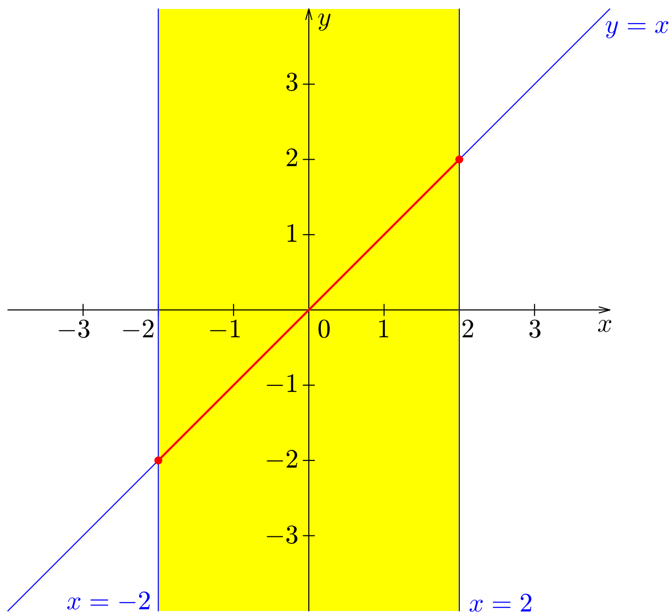
U: Áno, teda riešením našej sústavy štyroch nerovníc sú všetky usporiadané dvojice, ktorých obrazy vytvoria takýto štvorec. Pre zaujímavosť dodám, že sústavu nerovníc v zadaní možno nahradiť jedinou nerovnicou

$$|x| + |y| \leqq 1.$$

Úloha 6: *Graficky riešte v $\mathbb{R}^2$ sústavu:*

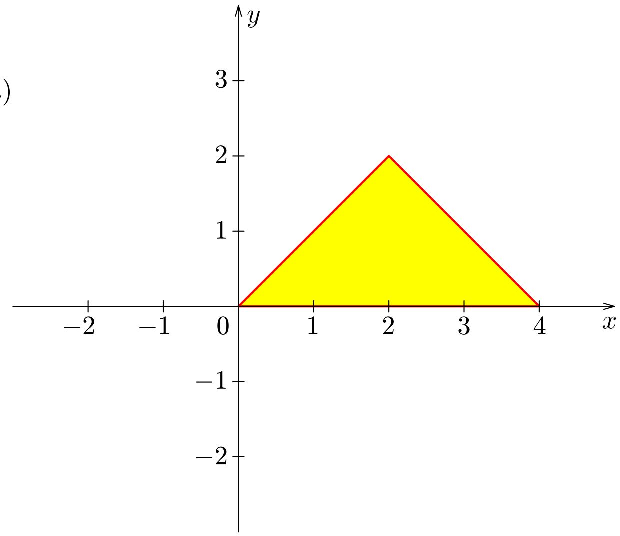
$$x - y = 0; \quad x \geqq -2; \quad x \leqq 2$$

Výsledok:

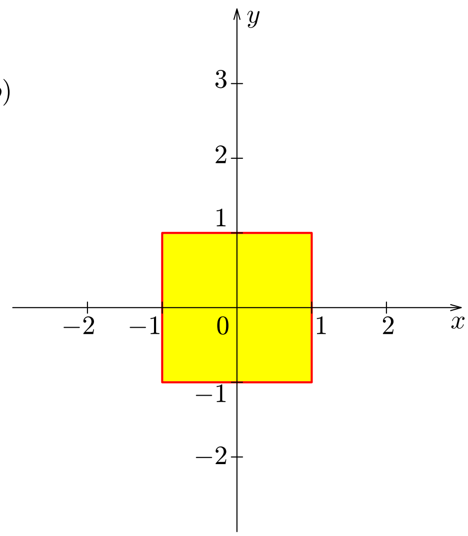


Príklad 7: *Nájdite sústavy lineárnych nerovníc s dvoma neznámymi, ktorých riešenia sú znázornené na obrázkoch:*

a)



b)



U: Najprv si zopakujme, čo je grafickým vyjadrením množiny koreňov lineárnej nerovnice s dvoma neznámymi.

Ž: *Je to polrovina, pričom pri neostrej nerovnici do nej patrí aj hraničná priamka, ale pri ostrej nerovnici tam nepatrí.*

U: A ako nájdeš tú hraničnú priamku?

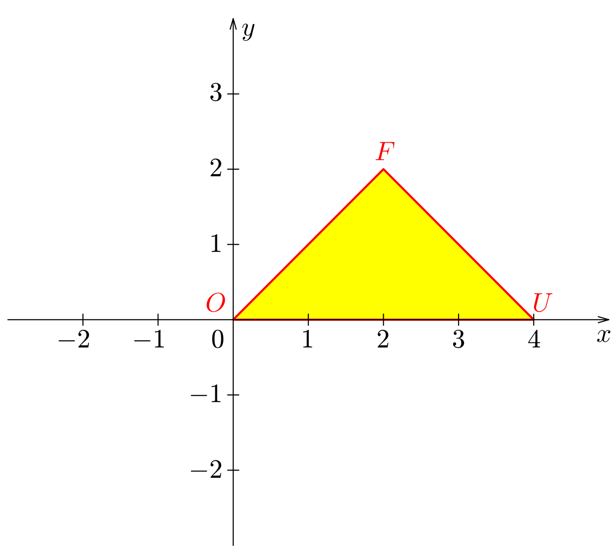
Ž: *Ako grafické vyjadrenie zodpovedajúcej rovnice.*

U: Výborne. Pozrime sa teda na prvý obrázok. Je na ňom znázornený trojuholník ako výsledok grafického riešenia nejakej sústavy nerovníc. Koľko asi bolo tých nerovníc?

Ž: *Zrejme tri, lebo trojuholník vznikne ako prienik troch polrovín.*

U: Tvojou úlohou je teda nájsť tie tri polroviny a im zodpovedajúce nerovnice. Pre ľahšiu orientáciu navrhujem označiť vrcholy trojuholníka.

Ž: *Dobre, tak nech sa trojuholník volá UFO, pričom* $U\,[4;0]$, $F\,[2;2]$ *a* $O\,[0;0]$.



Najľahšie bude vyjadriť polrovinu $\overrightarrow{OUF}$. Jej hraničnou priamkou je os x a všetky body ležiace nad ňou majú kladnú y-ovú súradnicu. Takže prvá nerovnica je

$$y \geqq 0.$$

U: Skús pokračovať polrovinou $\overrightarrow{OFU}$.

Ž: *Začnem hraničnou priamkou. Ležia na nej body $O\,[0;0]$ a $F\,[2;2]$. Z toho usudzujem, že jej rovnica je jednoduchá: $y = x$. Lenže ja potrebujem nerovnicu. Preto si skúsim tipnúť, že by to mohlo byť $y \geqq x$. A overím to pomocou bodu U. Takže dosadím jeho súradnice a dostanem $0 \geqq 4$. Hm, nevyšlo. Teda som si zle tipol a nerovnica má byť opačne:*

$$y \leqq x.$$

U: Ide ti to výborne, ostala posledná polrovina $\overrightarrow{UFO}$.

Ž: *Najprv potrebujem zistiť rovnicu hraničnej priamky $\overleftrightarrow{UF}$. To ale nebude také ľahké.*

U: Ale zase ani ťažké. Priamka $\overleftrightarrow{UF}$ predstavuje graf nejakej lineárnej funkcie a ty na nej poznáš dva body.

Ž: *Poznám, ale čo s nimi?*

U: Spomeň si na rovnicu lineárnej funkcie.

Ž: *Tá je $y = ax + b$. Aha, už rozumiem. Dosadím do tejto rovnice za x a y súradnice bodov U a F. Takže pre bod $U\,[4;0]$ dostanem*

$$0 = a \cdot 4 + b.$$

A pre bod $F\,[2;2]$ dostanem rovnicu

$$2 = a \cdot 2 + b.$$

U: Tým si dostal jednoduchú sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ž: *A hravo ju vyriešim. Z prvej rovnice vyjadrím*

$$b = -4a.$$

Dosadím do druhej rovnice

$$2 = 2a - 4a,$$

odkiaľ

$$a = -1.$$

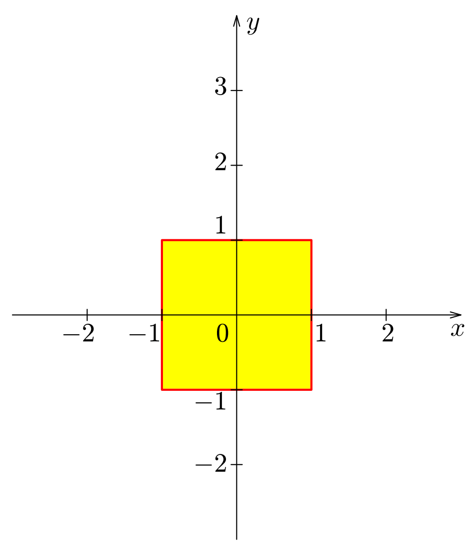
Potom $b = 4$, *teda priamka* UF *má rovnicu* $y = -x + 4$. *Ja ale potrebujem nerovnicu. Vezmem si na pomoc bod* $O\,[0; 0]$. *Keďže tento bod má patriť mojej polrovine a* $0 < 4$, *tak jej nerovnica bude*

$$y \leqq -x + 4.$$

U: Súhlasím, len možno krajší zápis by bol $x + y \leqq 4$. V rámčeku je zhrnuté riešenie úlohy.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y & \geqq & 0 \\ x - y & \geqq & 0 \\ x + y & \leqq & 4 \end{array}}$$

U: Keď si tak dobre zvládol trojuholník, nebude ti snáď robiť problémy ani štvorec, ktorý máme na ďalšom obrázku:



Ž: *Myslím, že nie. Je jasné, že teraz potrebujem štyri nerovnice. Ak sa však dobre pozriem na ten štvorec, tak vidím, že všetky jeho body majú ohraničené súradnice. A to tak, že x-ové súradnice sú len medzi 1 a -1. Teda prvé dve nerovnice sú*

$$x \geqq -1, \quad x \leqq 1.$$

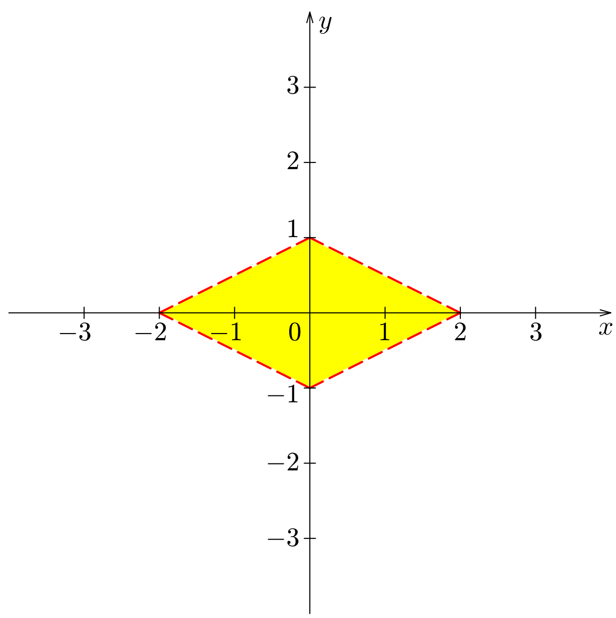
Tiež y-ové súradnice sa menia od -1 po 1, preto ďalšie dve nerovnice sú

$$y \geqq -1, \quad y \leqq 1.$$

A je to.

U: OK

Úloha 7: *Nájdite sústavu lineárnych nerovníc s dvoma neznámymi, ktorej riešenie je znázornené na obrázku:*



Výsledok: $-x + 2y < 2; \quad x - 2y < 2; \quad x + 2y < 2; \quad -x - 2y < 2$